

Elementare Herleitung der Dirac-Gleichung / III

Hans Sallhofer

Z. Naturforsch. **34a**, 1145–1146 (1979);
eingegangen am 9. August 1979

Elementary Derivation of the Dirac Equation / III

Comparison of the solutions of the Dirac equation with the corresponding solutions of electrodynamics.

In der Elektrodynamik [1] (5) kommt die Energiegedichte U im Falle komplexer Feldstärken durch die Gleichung

$$\begin{aligned} \dot{U} + \operatorname{div} \mathbf{S} &= \{(\partial/\partial t)(1/2)[\epsilon(E^{\text{Re}})^2 + \mu(H^{\text{Re}})^2] \\ &\quad + \operatorname{div} c \mathbf{E}^{\text{Re}} \times \mathbf{H}^{\text{Re}}\} \\ &+ \{\partial/\partial t)(1/2)[\epsilon(E^{\text{Im}})^2 + \mu(H^{\text{Im}})^2] \\ &\quad + \operatorname{div} c \mathbf{E}^{\text{Im}} \times \mathbf{H}^{\text{Im}}\} \\ &= (\dot{U}^{\text{Re}} + \operatorname{div} \mathbf{S}^{\text{Re}}) + (\dot{U}^{\text{Im}} + \operatorname{div} \mathbf{S}^{\text{Im}}) = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

zum Ausdruck. Sie ergibt sich aus den ersten beiden Gleichungen von [1] (5) mit Hilfe der konjugiert-komplexen Feldstärken, der Identität

$$\operatorname{div} \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H} \quad (2)$$

und den Komponentenbeziehungen

$$E_k = E_k^{\text{Re}} + i E_k^{\text{Im}}, \quad H_k = H_k^{\text{Re}} + i H_k^{\text{Im}}. \quad (3)$$

Realfeld und Imaginärfeld werden in (1) ersichtlich als gleichbedeutsame Schilderungen zweier getrennter Realitäten ausgewiesen.

Die Auswirkung des Lösungsansatzes [1] (6)/[1] (7) auf die Energiebilanz von [1] (5) wird durch eine Gegenüberstellung deutlich, die sich mit Hilfe der Gleichung [1] (8) und ihrer konjugiert-komplexen Form

$$(\partial/\partial t) \Psi_k^* \Psi_k = 0 \quad (4)$$

(übersternte Größen = Konjugiertkomplexe)

wie folgt ermitteln lässt: Man multipliziert die erste Gleichung von [1] (8) mit Ψ_1^* , die zweite mit Ψ_2^* , usw., – und in gleicher Weise – die erste Gleichung von (4) mit Ψ_1 , die zweite mit Ψ_2 , usw.,

Sonderdruckanforderungen an Dr. Hans Sallhofer, Fischerstraße 12, A-5280 Braunau, Austria.

0340-4811 / 79 / 0900-1145 \$ 01.00/0.

Please order a reprint rather than making your own copy.

und addiert dann alle acht Gleichungen. Nach Einsetzen aus [1] (7) kommt bei schließlicher Berücksichtigung von (3) die Energiebilanz

$$\begin{aligned} (\dot{U}^{\text{Re}} + \operatorname{div} \mathbf{S}^{\text{Re}}) + (\dot{U}^{\text{Im}} + \operatorname{div} \mathbf{S}^{\text{Im}}) \\ + (\dot{U} + \operatorname{div} \mathbf{S}) = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Und hieraus folgt endlich wegen (1)

$$\dot{U} + \operatorname{div} \mathbf{S} = 0. \quad (6)$$

Diese Gleichung schränkt die elektrodynamischen Lösungen gegenüber den wellenmechanischen ein. Sie ist eine Folge davon, daß für den Lösungsansatz [1] (6)/[1] (7) alle vier Gleichungen von [1] (5) herangezogen werden mußten, während die Kontinuitätsgleichung (1) schon aus den beiden ersten folgt. Da die beiden letzten die zwischen [1] (4) und [1] (5) angesprochene Normalstandbedingung

$$\mathbf{E} \perp \operatorname{grad} \epsilon, \quad \mathbf{H} \perp \operatorname{grad} \mu \quad (7)$$

mitbringen, erfüllen Lösungen, die (6) befolgen, auch (7).

Im Falle des Diracschen Wasserstoff-Spinors (erste Spinalternative) [2]

$$\Psi = \begin{cases} \Psi_1 = -i P_{l+1}^m R_1^I \exp i(m\varphi - \omega^I t) \\ \Psi_2 = -i P_{l+1}^{m+1} R_1^I \exp i[(m+1)\varphi - \omega^I t] \\ \Psi_3 = (l+m+1) P_l^m R_3^I \exp i(m\varphi - \omega^I t) \\ \Psi_4 = -(l-m) P_l^{m+1} R_3^I \\ \quad \cdot \exp i[(m+1)\varphi - \omega^I t] \end{cases} \quad (8)$$

läßt es die Konzeption eines einheitlichen Wellenvorgangs als zweckmäßig erscheinen, die Relation [1] (7) so zu lesen, daß allen Komponenten der beiden elektromagnetischen Felder (Imaginärfeld und Realfeld) bei festem Radius eine einheitliche Wellenlänge zukommt. Die vierte Gleichung der Relation beispielsweise, die die vierte Spinorkomponente den ersten und zweiten magnetischen Komponenten gegenüberstellt, wäre dann nach (8) so zu schreiben:

$$\begin{aligned} \Psi_4 &= H_1 + i H_2 = \\ &= -(l-m) P_l^{m+1} R_3^I (\cos \varphi \\ &\quad + i \sin \varphi) \exp i(m\varphi - \omega^I t) \\ &= -(1/2)(l-m) P_l^{m+1} R_3^I (\cos \varphi \\ &\quad + i \sin \varphi) \exp i(m\varphi - \omega^I t) \\ &\quad - (1/2)(l-m) P_l^{m+1} R_3^I (\sin \varphi \\ &\quad - i \cos \varphi) \exp i(m\varphi - \omega^I t + \pi/2) \end{aligned} \quad (9)$$

und

$$H_1 = - (1/2) (l-m) P_1^{m+1} \\ \cdot R_3^I [\cos \varphi \exp i(m\varphi - \omega^I t) \\ + \sin \varphi \cdot \exp i(m\varphi - \omega^I t + \pi/2)]$$

$$H_2 = - (1/2) (l-m) P_1^{m+1} \\ \cdot R_3^I [\sin \varphi \exp i(m\varphi - \omega^I t) \\ - \cos \varphi \cdot \exp i(m\varphi - \omega^I t + \pi/2)].$$

Man erfährt hier beiläufig, wie die Theorie [1] (5) es anstellt, Lösungen durch die Entfaltung (9) der Bedingung (7) zu unterwerfen. Man sieht auch, daß der Wasserstoff-Spinor (8) aus der Sicht der Elektrodynamik als eine unterentwickelte Größe erscheint, die ihre zweite und vierte Komponente nicht entfalten und somit keinen einheitlichen Wellenvorgang beschreiben kann. Aus (9) geht ferner hervor, daß die Spins der beiden Felder einer Lösung durch

die ersten und zweiten elektrischen oder magnetischen Komponenten zum Ausdruck kommen.

Im Hinblick auf die formale Struktur der Elektrodynamik [1] (5) stellt sich die Frage, was die zweiteiligen Lösungen darstellen sollen, oder allgemeiner, welche fundamentalen Informationen aus der Gestalt von [1] (5) erfließen. — Wegen der dritten Gleichung sind die Felder jedenfalls ladungsfrei. Das heißt im Falle des Wasserstoffproblems: Es gibt hier kein Umlaufelektron. Weiters besagen die beiden ersten Gleichungen, daß eine Brechung vorhanden ist, die beiden letzten (Materialgleichungen) hingegen, daß sich der beschriebene Vorgang im leeren Raum abspielt. Bleibt nur das Bild eines „interfraktionären“ Phänomens: Die beiden Wellenfelder einer Lösung brechen sich gegenseitig inhomogen, isotrop und zeitunabhängig.

[1] H. Sallhofer, Z. Naturforsch. **33a**, 1378–1379 (1978).

[2] C. G. Darwin, Proc. Roy. Soc. **118**, 654 (1928).